Figuras de Lissajous y Polinomios de Chebyshev

Julio Castiñeira Merino
jcastine@boj.pntic.mec.es

Versión española del artículo publicado
en "**The College Mathematics Journal**"
Lisssajous figures and Chebyshev Polynomials
Volumen 34, Nº 2, Marzo de 2003

Para mi esposa Julia y mis hijos Isabel, Lucía y Rodrigo

El propósito de este trabajo es obtener las ecuaciones implícitas de las figuras de Lissajous en la forma $f(x,y)=0$ usando algunas propiedades elementales de los polinomios de Chebyshev

Una figura de Lissajous es la trayectoria de un punto móvil cuyas coordenadas rectangulares son movimientos armónicos simples. La ecuación de un movimiento armónico simple es $x = a\cos(w\,t + j)$ donde t es el tiempo y las constantes a, ? , y j son la amplitud, la frecuencia, y la fase respectivamente. Las ecuaciones paramétricas de las figuras de Lissajous son por tanto

$$x = a\cos\left(w_1 t + j_1\right)$$
$$y = b\cos\left(w_2 t + j_2\right) \ .$$

Las constantes a y b determinan el tamaño de la curva mientras que su forma depende de la razón de sus frecuencias. Si las frecuencias son iguales, la curva es o una elipse o un segmento, ocurriendo este caso si la diferencia de fases es un multiplo de p. Esta propiedad puede usarse para estudiar una señal desconocida. Si aplicamos la señal desconocida al eje vertical de un osciloscopio y entonces variamos la frecuencia horizontal, cuando el osciloscopio muestre una elipse hemos determinado la señal de la frecuencia.

Las figuras de Lissajous fueron descubiertas por el astrónomo y matemático americano Nathaniel Bowditch in 1815 cuando estudiaba el movimiento del péndulo compuesto. Bowditch (1773-1838) fué un científico autodidacta, capitán de un navío mercante, presidente de una compañia de seguros, actuario de la Compañia de Seguros del Hospital de Boston, y presidente de la Academia Americana de las Artes y las Ciencias. Autor de numerosos trabajos científicos, es recordado principalmente por su libro *"The New American Practical Navigator"*, que fue adoptado por el Departamento Americano de la Marina de Estados Unidos. Jules Antoine Lissajous (1822-1880) fue un físico francés que, independientemente de Bowditch, estudió ampliamente las curvas que llevan su nombre en sus investigaciones sobre Optica. [**2**]**.**

Entre las diferentes formas de escribir las ecuaciones paramétricas para las figuras, o curvas (un término mas natural), de Lissajous, elegimos el siguiente, donde m y n son enteros, primos entre si, p y q son números reales, y $0 \le t \le 2p$:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\left(mt + p\right) \\ y &= b\sin\left(nt + q\right) \ . \end{aligned} \qquad (1)$$

Obviamente cualquier figura cuya razón de fecuencias es racional puede expresarse de esta forma haciendo un cambio lineal de variable. El expresar la abscisa como función del seno y la ordenada como función del coseno tiene algún propósito. Esta parametrización es semejante a la parametrización de la circunferencia y, por otra parte, nos permite expresar la ecuación implícita de una figura de Lissajous de una forma simple.

Anteriormente hemos dicho que la elipse es una curva de Lissajous. Otras curvas bien conocidas también lo son. Indicamos una lista de algunas de ellas con sus nombres [**3**]. Los Lectores con calculadoras gráficas pueden ver sus formas, y aquellas otras curvas de Lisssajous que no aparecen en la relación.

Ecuaciones Paramétricas	Nombre	Ecuación Implicíta
$x = r\cos t$ $y = r\sin t$	Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$
$x = a\cos(t - p/2)$ $y = b\sin t$	Segmento	$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
$x = a\cos t$ $y = b\sin t$	Elipse	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
$x = a\cos t$ $y = (a/2)\sin 2t$	Lemniscata de Gerono	$x^4 = a^2(x^2 - y^2)$
$x = -\cos 2t$ $y = 2\sqrt{p}\sin t$	Letra *C* (Parábola)	$y^2 = 2p(x+1)$
$x = \cos 2t$ $y = \sin(3t + p/2)$	Cúbica deTschirnhaus	$2y^2 = 4x^3 - 3x + 1$
$x = \cos t$ $y = \sin 3t$	El Logo de la ABC	$(4x^3 - 3x)^2 + y^2 = 1$
$x = 2\sqrt{2}\cos t$ $y = \sqrt{2}\sin(2t + 5p/4)$	Alforja	$x^4 + 4x^2(y-2) + 8(y-1)^2 = 0$

Estos ejemplos son útiles para mostrar algunas de las propiedades de las curvas de Lissajous. Por ejemplo, en el caso del segmento de recta, la parábola, o la cubica de Tchirhaus el punto móvil gira y regresa por el mismo camino. Estos casos los designaremos como casos degenerados. En los casos no degenerados, el punto nunca invierte la dirección. La terminología puede no ser la mejor pero es útil para identificar los casos facilmente. Una curva de Lissajous (1) es degenerada cuando m es par y $\sin d = 0$ o m es impar y $\cos d = 0$ donde $d = mq - np$. En el caso degenerado, la curva puede determinarse cuando t varía en un intervalo de longitud p. Notemos que cualquier intervalo de esta longitud no describe la curva completamente. Esta discusión sobre el parámetro es importante si, en la definición de curva paramétrica, se exige la condición de que la aplicación sea localmente inyectiva. [**1**] [**4**].

En geometría analítica plana una curva se define por su ecuación implícita $f(x, y) = 0$. Si $f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$ es un polinomio, se le llama curva algebraica y curva trascendente si f es una función trascendente. Las curvas de Lissajous son curvas algebraicas.

La ecuación implícita de una curva de Lissajous se obtiene eliminando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas. Este proceso puede realizarse como sigue:

1. Expresar x e y en terminos de cos mt, sin mt, cos nt, and sin nt usando las fórmulas de la suma y de la diferencia de dos ángulos.
2. Expresar las funciones trigonométricas de los ángulos multiples en términos de sin t y cos t.
3. Expresar las funciones sin t and cos t en términos de $u = \tan(t/2)$ usando las conocidas formulas

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}\ , \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Tenemos entonces una parametrización racional de la curva, $x = r(u)$, $y = s(u)$.

4. Eliminar el parametro u.

El proceso anterior puede hacerse, algunas veces simplemente, pero generalmente de una forma complicada que requiere tiempo y el uso de herramientas de eliminación algebraica [**5**]. Esta dificultad se pone de manifiesto cuando aplicamos este proceso a alguna de las ecuciones paramétricas citadas en la lista anterior. Probaremos que las ecuaciones implícitas de las curvas de Lissajous pueden hallarse usando los polinomios de Chebyshev.

El polinomio de Chebyshev de grado n está caracterizado por la propiedad $T_n(\cos a) = \cos na$. Los primeros seis polinomios con sus correspondientes fórmulas del ángulo multiple son

Polinomio de Chebyshev	Fórmula del ángulo múltiple
$T_0(x) = 1$	$\cos 0 \cdot a = 1$
$T_1(x) = x$	$\cos a = \cos a$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$
$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$

Cuando n es pequeño, los polinomios de Chebyshev pueden calcularse usando la recurrencia

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x.$$

La fórmula puede obtenerse usando la suma de cosenos

$$T_n(\cos a) + T_{n-2}(\cos a) = \cos na + \cos(n-1)a = 2\cos a \cos(n-1)a.$$

Los polinomios de Chebyshev son curvas de Lissajous. De hecho, una parametrizacion de la curva $y = T_n(x)$ para $|x| \le 1$ es $x = \cos t$, $y = -\sin(t - p/2)$, $0 < t < 2\pi$.

Los polinomios de Chebyshev tienen la propiedad

$$T_n(\sin a) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin na, & n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos na, & n \text{ par} \end{cases}. \qquad (2)$$

Veamos esto cuando $n = 2k$,

$$T_{2k}(\sin a) = T_{2k}(\cos(a - p/2)) = \cos 2k(a - p/2) = \cos(2ka - kp)$$
$$= \cos 2ka \cos kp + \sin 2ka \sin kp = (-1)^k \cos 2ka.$$

La demostración es análoga cuando n es impar.

Teorema. Dada la curva paramétrica plana

$$x = \cos(mt + p)$$
$$y = \sin(nt + q),$$

$0 \le t \le 2p$, donde p, q son números reales y m, n enteros primos entre sí.
Sea

$$d = \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}.$$

Entonces la ecuación de la curva es

(3) $$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{m/2} T_n(x) T_m(y) \cos d - \sin^2 d = 0$$

si m es par y $\sin d \neq 0$,

(4) $$\cos d \;\; T_n(x) - (-1)^{m/2} T_m(y) = 0$$

si m es par y $\sin d = 0$,

(5) $$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{(m-1)/2} T_n(x) T_m(y) \sin d - \cos^2 d = 0$$

si m es impar y $\cos(d) \neq 0$, y

(6) $$\sin d \;\; T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} T_m(y) = 0$$

si m es impar y $\cos d = 0$.

Demostración.
Probaremos (3) y (4), los casos cuando m es par. Cuando m es impar, (5) y (6) se obtienen análogamente.
Aplicando (2) con m par así como la propiedad característica de los polinomios de Chebyshev obtenemos

$$T_m(y) = T_m(\sin(nt + q)) = (-1)^{m/2} \cos(mnt + mq),$$
$$T_n(x) = T_n(\cos(mt + p)) = \cos(mnt + np).$$

Aplicando la formula del coseno de la suma de dos ángulos obtenemos

$$\begin{aligned} \cos mq \cos mnt - \sin mq \sin mnt &= (-1)^{m/2} T_m(y) \\ \cos np \cos mnt - \sin np \sin mnt &= T_n(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Este es un sistema lineal en cos mnt y sin mnt, con determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos mq & -\sin mq \\ \cos np & -\sin np \end{vmatrix} = \sin mq \cos np - \cos mq \sin np = \sin(mq - np) = \sin d.$$

Si $\sin d \neq 0$, aplicando la regla de Cramer obtenemos la solución

$$\cos mnt = \frac{\sin mq}{\sin d} T_n(x) - \frac{(-1)^{m/2} \sin np}{\sin d} T_m(y)$$

$$\sin mnt = \frac{\cos mq}{\sin d} T_n(x) - \frac{(-1)^{m/2} \cos np}{\sin d} T_m(y) \; .$$

Sustituyendo en la identidad $\cos^2 mnt + \sin^2 mnt = 1$ y observando que de acuerdo a la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos, el coeficiente de $T_m(x) T_n(y)$ es

$$\frac{-2(-1)^{m/2}}{\sin^2 d} \left(\cos mq \cos np + \sin mq \sin np\right) = \frac{-2(-1)^{m/2}}{\sin^2 d} \cos(mq - np),$$

obtenemos (3) después de multiplicar la ecuación por $\sin^2 d$.
Si $\sin d = 0$, el sistema (7) tiene solución si

$$\frac{\cos mq}{\cos np} = \frac{-\sin mq}{-\sin np} = \frac{(-1)^{m/2} T_m(y)}{T_n(x)},$$

y entonces

$$\cos mq T_n(x) = (-1)^{m/2} \cos np T_m(y)$$
$$\sin mq T_n(x) = (-1)^{m/2} \sin np T_m(y) \; .$$

Sumando las ecuaciones después de multiplicar la primera por cos np y la segunda por sin np se tiene

$$(\cos mq \cos np + \sin mq \sin np) T_n(x) = (-1)^{m/2} (\cos^2 np + \sin^2 np) T_m(y),$$

o

$$\cos(mq - np) T_n(x) = (-1)^{m/2} T_m(y),$$

lo cual es (4).

Por exemplo, la curva de Lissajous no degenerada con m par y $\sin d = 1$,

$$x = 3\cos 2t$$
$$y = \sqrt{2}\sin(3t + \frac{p}{4})$$

tiene la ecuación implícita

$$T_3\left(\frac{x}{3}\right)^2 + T_2\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

o, simplificando,

$$\left(\frac{4x^3}{27} - x\right)^2 + \left(y^2 - 1\right)^2 = 1$$

Otros ejemplos son

Ecuaciones Paramétricas	Ecuación Implícita
$x = \cos 2t$ $y = \sin(3t - 5p/12)$	$(4x^3 - 3x)^2 + (2y^2 - 1)^2 - \sqrt{3}(4x^3 - 3x)(2y^2 - 1) = \frac{1}{4}$
$x = \cos(3t + p/4)$ $y = \sin t$	$x^2 + (4y^3 - 3y)^2 - \sqrt{2}x(4y^3 - 3y) = 1/2$
$x = \cos 4t$ $y = \sin 3t$	$4x^3 - 3x = 8y^4 - 8y^2 + 1$
$x = \cos 5t$ $y = \sin(3t - p/2)$	$3x - 4x^3 = 16y^5 - 20y^3 + 5y$

Es natural preguntarse si el recíproco del teorema es cierto, i.e., si un punto satisface cualquiera de las ecuaciones (3)-(6) es una figura de Lissajous. La respuesta a esta cuestión es “si” para los casos no degenerados (3) y (5) y “no siempre” para los casos degenerados (4) y (6). Las demostraciones no serán dads aquí (para (3) y (5) esencialmente consisten en recorrer la demostración del teorema al revés). pero se pueden solicitar al autor.

Las ecuaciones (3)-(6) se definen para cualesquiera enteros positivos m y n. Si d = gcd(m, n) > 1, cada una de las ecuaciones define implícitamente una curva que contiene la figura de Lissajous con parámetros $m' = m/d$, $n' = n/d$, $p = 0$, y $q = d/m$, y también otras curvas. Con respecto a estas ecuaciones podemos plantear las conjeturas siguientes:

Conjetura I. Cada una de las ecuaciones implícitas (3)-(6) determina una curva formada por un número finito de figuras de Lissajous.

Conjetura II. Los polinomios en dos variables que definen las ecuaciones (3)-(6) son irreducibles en **R** si y solo si *m* y *n* son primos entre si.

Referencias

1. Goetz, A., *Introduction to Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1968.
2. Lissajous, J. A. Mémoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires. *Annales de Chimie et de Physique*, Tome II, 1857.
3. The New *Encyclopaedia Britannica*, 1998.
4. Rutter, J. W., *Geometry of Curves*, Chapman & Hall/CRC, 2000.
5. Walker R. J., *Algebraic Curves,* Springer-Verlag, 1978.

Volver al principio

Julio Castiñeira Merino